Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

FICHA 1 – NÚMEROS E FUNÇÕES COMPLEXAS

(1) Calcule $\sqrt{i}$, $\sqrt[3]{i}$ e $\sqrt[4]{i}$ e represente estes números geometricamente.

Resolução: *As coordenadas polares de i são $|i| = 1$ e $\arg i = \frac{\pi}{2}$, logo, em termos da exponencial complexa, $i = e^{\frac{\pi}{2}i}$. O símbolo $\sqrt[n]{i}$ representa o conjunto dos números da forma*

$$e^{\frac{(1+4k)\pi}{2n}i}\ , \qquad \text{com } k = 0, 1, \ldots, n-1\ .$$

Deduz-se que $\sqrt{i}$ simboliza

$$e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \qquad \text{e} \qquad e^{\frac{5\pi}{4}i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\ ,$$

$\sqrt[3]{i}$ simboliza

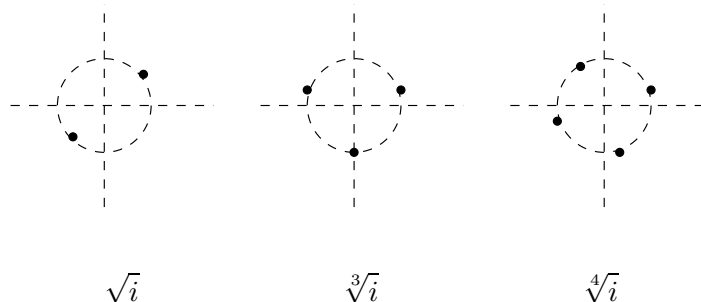
$$e^{\frac{\pi}{6}i} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\ , \qquad e^{\frac{5\pi}{6}i} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \qquad \text{e} \qquad e^{\frac{3\pi}{2}i} = -i\ ,$$

e $\sqrt[4]{i}$ simboliza

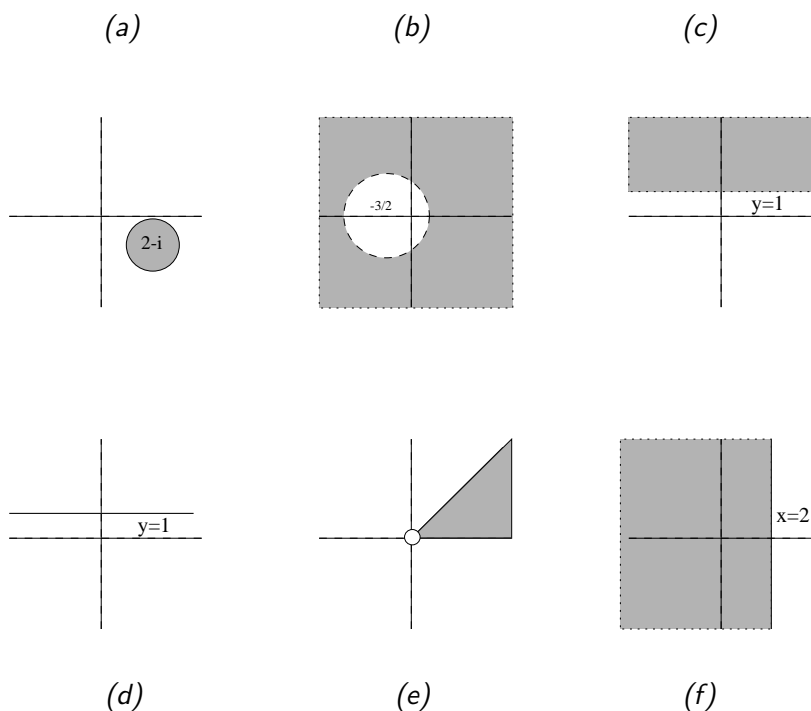
$$e^{\frac{\pi}{8}i}\ , \qquad e^{\frac{5\pi}{8}i}\ , \qquad e^{\frac{9\pi}{8}i} \qquad \text{e} \qquad e^{\frac{13\pi}{8}i}\ .$$

Os números $\sqrt{i}$, $\sqrt[3]{i}$ e $\sqrt[4]{i}$ têm o seguinte aspecto geométrico, onde a circunferência tracejada tem raio 1.

$\sqrt{i}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{i}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{i}$

□

(2) Esboce os seguintes conjuntos e diga quais deles são regiões:
- (a) $|z - 2 + i| \leq 1$;
- (b) $|2z + 3| > 4$;
- (c) $\operatorname{Im} z > 1$;
- (d) $\operatorname{Im} z = 1$;
- (e) $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} \quad (z \neq 0)$;
- (f) $|z - 4| \geq |z|$.

Resolução: *Os conjuntos (b) e (c) são regiões (i.e., são abertos conexos e não-vazios).*

□

(3) Resolva a seguinte equação

$$1 + 3z + 3z^2 + z^3 = 3\sqrt{3}\left(e^{-i\pi} + \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) .$$

Resolução: *Simplificando a equação, obtém-se*

$$(1+z)^3 = 3\sqrt{3}(-i) ,$$

ou seja,

$$(1+z)^3 = (\sqrt{3})^3 e^{i\frac{3\pi}{2}} .$$

As soluções da equação são da forma $z = -1 + \sqrt{3}e^{i\frac{3\pi+4k\pi}{6}}$, *com* $k \in \{0,1,2\}$, *ou seja, são*

$$z = -1 + \sqrt{3}i \qquad \textit{ou} \qquad z = -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \textit{ou} \qquad z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i .$$

□

(4) Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$.

(a) Mostre que u é harmónica.

(b) Exiba uma função $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

seja analítica e satisfaça $f(0) = 0$.

Resolução:

(a)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0 \ .$$

(b) *Para que f seja analítica em $\mathbb{C}$, a função v tem que ser tal que o par u, v satisfaça as equações de Cauchy-Riemann:*

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy \\ \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \ . \end{cases}$$

Primitivando cada uma das duas equações, obtém-se

$$v(x,y) = \int (6xy)\ dx = 3x^2y + F(y) \qquad \text{e}$$

$$v(x,y) = \int (3x^2 - 3y^2)\ dy = 3x^2y - y^3 + G(x)\ ,$$

onde F, G são funções correspondentes às constantes de integração. Compatibilizando as duas condições, conclui-se que,

$$v(x,y) = 3x^2y - y^3 + c$$

onde c é uma constante complexa arbitrária. Escolhe-se $c = 0$, de maneira que $v(0,0) = 0$. Conclui-se que, se se tomar $v(x,y) = 3x^2y - y^3$, a função definida por $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ é analítica (porque u e v têm derivadas parciais contínuas e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em $\mathbb{C}$) e além disso $f(0) = 0$.

□

(5) Seja $f(z) = (x^2 - y^2) + 2i|xy|$ para $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

(a) Estude a analiticidade de $f(z)$.

(b) Calcule $f'(z)$ nos pontos onde $f(z)$ é analítica.

Resolução:

(a) *Primeiro estuda-se as equações de Cauchy-Riemann.*
Escrevendo f na forma $u(x,y) + iv(x,y)$ temos

$$u(x,y) = x^2 - y^2$$

$$v(x,y) = 2|xy| = \begin{cases} 2xy & \text{se } xy > 0 \\ 0 & \text{se } xy = 0 \\ -2xy & \text{se } xy < 0 \end{cases}$$

Quando $xy > 0$, o par u, v satisfaz as equações de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}\ . \end{cases}$$

Quando $xy = 0$, a função $v(x,y)$ só tem ambas as derivadas parciais no ponto $(0,0)$. De facto, nos pontos da forma $(0,y)$ com $y \neq 0$, não existe $\frac{\partial v}{\partial x}$ já que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{v(x,y)}{x} = 2y \neq -2y = \lim_{x \to 0^-} \frac{v(x,y)}{x}$$

Da mesma maneira se vê que não existe $\frac{\partial v}{\partial y}$ nos pontos da forma $(x,0)$ com $x \neq 0$. Por outro lado temos

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = 0$$

pelo que as condições de Cauchy-Riemann se verificam no ponto $(0,0)$.

Quando $xy < 0$, o par u, v viola as equações de Cauchy-Riemann já que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \neq -2x = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Conclusões quanto à diferenciabilidade.

Como u e v têm derivadas parciais contínuas em $\{z = x+iy \in \mathbb{C} \mid xy > 0\} \cup \{(0,0)\}$, conclui-se que a função f é diferenciável em todos esses pontos. (Recorde-se que, se uma função complexa $f = u + iv$ é tal que o par u, v satisfaz as equações de Cauchy-Riemann no ponto (x, y) e u e v têm derivadas parciais contínuas em (x, y), então f é diferenciável no ponto $z = x + iy$.)

Em qualquer outro ponto, isto é, para $z \in \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid xy \leq 0\} \backslash \{(0,0)\}$, a função f não é diferenciável porque não satisfaz as equações de Cauchy-Riemann. (Recorde-se que, se uma função complexa $f = u + iv$ é diferenciável no ponto $z = x + iy$, então o par u, v satisfaz as equações de Cauchy-Riemann em (x, y).)

Conclusões quanto à analiticidade – resposta ao exercício.

A função f é analítica no aberto $\{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid xy > 0\}$, formado pelos primeiro e terceiro quadrantes, e em mais parte nenhuma. (Na origem, a função f é diferenciável com derivada $f'(0) = 0$, mas não é analítica pois $z = 0$ não admite qualquer vizinhança aberta onde f seja diferenciável.)

(b) *Em $\{z = x+iy \in \mathbb{C} \mid xy > 0\}$ (que é onde $f(z)$ é analítica), a derivada de f é dada, por exemplo, pela fórmula*

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \ .$$

Como, neste domínio,

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial u}{\partial x} &= 2x \\ \tfrac{\partial v}{\partial x} &= \tfrac{\partial}{\partial x}(2xy) \ = \ 2y \end{aligned}$$

conclui-se que

$$f'(z) = 2x + 2yi = 2z \ .$$

□

Comentário: *O resultado $f'(z) = 2z$ da alínea (b), poderia ter sido equivalentemente obtido se se tivesse inicialmente observado que a função dada coincide com a função $g(z) = z^2$ no domínio de analiticidade.*

Note-se ainda que, em $\{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid xy < 0\}$, a função dada coincide com a função $h(z) = \overline{z}^2$, a qual não é analítica em qualquer ponto. ♢

(6) Exprima $\cos 3\varphi$ e $\sin 4\varphi$ em termos de $\cos\varphi$ e $\sin\varphi$.

Resolução: *Para um ângulo φ real, temos*

$$(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) = e^{3\varphi i} = (e^{\varphi i})^3 = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 \ .$$

Como

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi \ ,$$

extraindo as partes imaginárias, obtém-se

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi \ .$$

Temos $(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi) = e^{4\varphi i} = (e^{\varphi i})^4 = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^4$. *Como*

$$\begin{aligned} (\cos\varphi + i\sin\varphi)^4 \ = \ & \cos^4\varphi + 4i\cos^3\varphi\sin\varphi \\ & -6\cos^2\varphi\sin^2\varphi - 4i\cos\varphi\sin^3\varphi + \sin^4\varphi \ , \end{aligned}$$

extraindo as partes reais, obtém-se

$$\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi \ .$$

□

(7) Mostre que, para $z = x + yi$, se tem

$$|\cos z|^2 = \sinh^2 y + \cos^2 x = \cosh^2 y - \sin^2 x \ .$$

Resolução: *Para simplificar as contas, vamos usar o seguinte facto muito útil:*

$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$$

Este facto é uma consequência da definição da exponencial

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$$

já que a conjugação comuta com somas, produtos e limites. Para $z = x + yi$, tem-se

$$\begin{aligned}
|\cos z|^2 &= \cos z \cdot \overline{\cos z} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \cdot \frac{e^{-i\overline{z}} + e^{i\overline{z}}}{2} \\
&= \frac{e^{i(z-\overline{z})} + e^{i(z+\overline{z})} + e^{-i(z+\overline{z})} + e^{-i(z-\overline{z})}}{4} \\
&= \frac{e^{-2y} + e^{2ix} + e^{-2ix} + e^{2y}}{4} \\
\sinh^2 y &= \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2y} + e^{-2y} - 2}{4} \\
\cos^2 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2ix} + e^{-2ix} + 2}{4} \\
\cosh^2 y &= \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2y} + e^{-2y} + 2}{4} \\
\sin^2 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = -\frac{e^{2ix} + e^{-2ix} - 2}{4}
\end{aligned}$$

donde se verifica o resultado. □

(8) Escreva todos os valores de i^i na forma $a + bi$.

Resolução: *O símbolo i^i representa o conjunto dos números complexos s que têm logaritmo da forma $i\alpha$, para algum logaritmo α de i. Os logaritmos de i são as soluções da equação $e^\alpha = i$, ou seja, são os números da forma $\alpha = \ln|i| + (\arg i + 2k\pi)i$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, são*

$$\alpha = (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i \ , \qquad k \in \mathbb{Z} \ .$$

Conclui-se que os números $e^{i\alpha}$ que formam o conjunto i^i são

$$e^{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \ , \qquad k \in \mathbb{Z} \ .$$

□